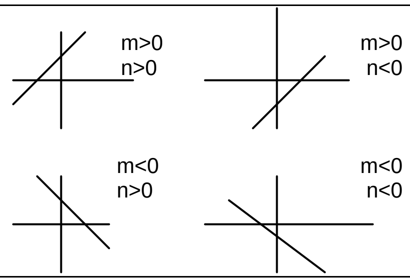
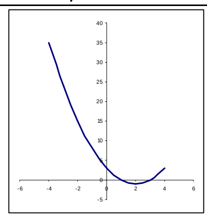
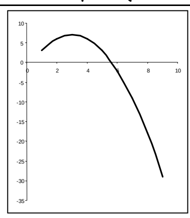
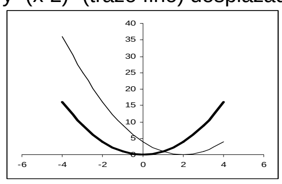
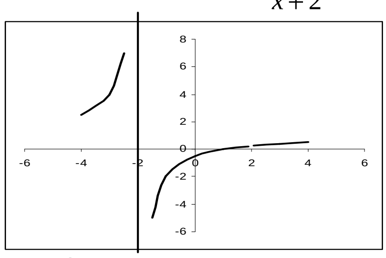
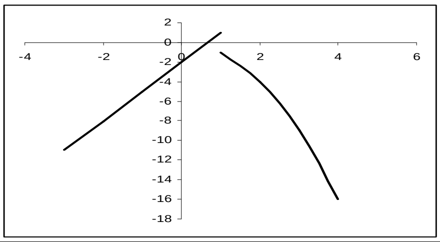
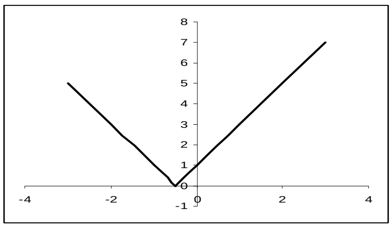
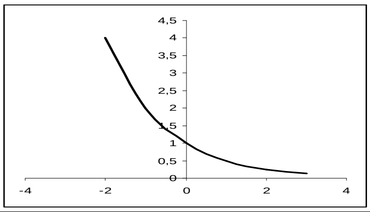
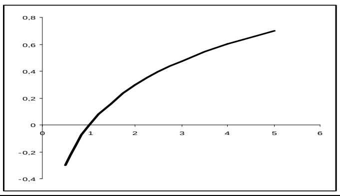
ANÁLISIS DE FUNCIONES, LÍMITES Y CONTINUIDAD. RESUMEN

<table>
<tr><th>Problema</th><th>Datos</th><th>Procedimiento</th><th>Ejemplo</th></tr>
<tr><td>Dominio de una función</td><td>La ecuación de la función</td><td>Casos en los que en dominio no es IR:
▪ Irracionales (excluir valores que hagan negativo el radicando.
▪ Logarítmicas (como en irracionales además del cero).
▪ Racionales (excluir valores que anulen el denominador)</td><td>Dominio de $y=\sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$. Se trata de una irracional:
<table>
<tr><th></th><th>-3</th><th>2</th><th></th></tr>
<tr><td>x-2</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td></tr>
<tr><td>X+3</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>(x-2)/(x+3)</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td></tr>
</table>
$Dom(y)=\left]-\infty,-3\right[\cup\left[2,+\infty\right[$</td></tr>
<tr><td>Funciones lineales</td><td>Ecuación y=mx+n.

“m” es la pendiente
“n” es la ordenada del origen.</td><td>Casos:
▪ m>0 y n>0 (corta a Y por encima del origen y forma con X ángulo agudo)
▪ m>0 y n<0 (corta a Y por debajo del origen y forma con X ángulo agudo)
▪ m<0 y n>0 (corta por encima y ángulo obtuso)
▪ m<0 y n<0 (corta por debajo y ángulo obtuso)</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Funciones cuadráticas</td><td>Ecuación y=ax^2+bx+c</td><td>- La gráfica es una parábola.
- Vértice en el punto de absica $x=-\frac{b}{2a}$
- Corta eje X (cuando lo hace) en las soluciones de la ecuación de 2º grado asociada)
- Corta al aje Y en (0, c)
- Si a>0 es cóncava
- Si a<0 es convexa</td><td> 
a>0 a<0</td></tr>
<tr><td>Transformación de funciones</td><td>Ecuación</td><td>- y=f(x)+k es como f(x) desplazada k unidades hacia arriba.
- y=-f(x) es simétrica de f(x) respecto al eje X
- y=(x+a) es como f(x) desplazada “a” unidades hacia la izquierda o derecha según “a” sea + ó -.
- Y=f(-x) es simétrica de f(x) respecto al eje Y</td><td>Vemos las gráficas de y=x^2 (trazo grueso) y la de y=(x-2)^2 (trazo fino) desplazada 2 unidades a la derecha:
</td></tr>
<tr><td>Funciones homográficas o hiperbólicas</td><td>Ecuación:
$y=\frac{ax+b}{cx+d}$</td><td>- La gráfica es una hipérbola.
- Tiene como asíntotas las rectas y=a/c (horizontal) y=-d/c (vertical)
- Si a=d=0 y c=1 la hipérbola tiene por asíntotas los ejes.</td><td>Representar la función $y=\frac{x-1}{x+2}$:

Sus asíntotas son x=-2, y=1</td></tr>
</table>

Funciones "a trozos"	Su dominio está dividido en varios intervalos en los que la ecuación de la función cambia	Su forma es (en el dominio [a, d]: $f(x)=\begin{cases} g(x) & si \quad a<x\le b \\ h(x) & si \quad b<x\le c \\ i(x) & si \quad c<x\le d \end{cases}$	Se representa cada tramo por separado sobre los mismos ejes, pudiendo los tramos de gráfica juntarse o no en los puntos de separación de los intervalos. Gráfica de: $f(x)=\begin{cases} 3x-2 & si \quad -3<x\le 1 \\ -x^2 & si \quad 1<x\le 4 \end{cases}$ 
Funciones en valor absoluto	Su ecuación: $\mathbf{y=\lvert f(x)\rvert}$	Se interpreta como una función definida en dos trozos así: $y=\begin{cases} f(x) & si \quad f(x)\ge 0 \\ -f(x) & si \quad f(x)<0 \end{cases}$ Hay que resolver la inecuación: $f(x)\ge 0$ para determinar los límites de cada trozo	Gráfica de $y=\lvert 2x+1\rvert=\begin{cases} 2x+1 & si \quad x\ge -\frac{1}{2} \\ -2x-1 & si \quad x<-\frac{1}{2} \end{cases}$ Donde el valor -1/2 sale de resolver la inecuación: $2x+1\ge 0 \Rightarrow x\ge -\frac{1}{2}$ 
Composición de funciones	Las funciones: y=f(x) y=g(x)	La función compuesta de ambas es: $(f\circ g)(x)=f\left[g(x)\right]$ Es decir se sustituye la "x" en la función f por la función g(x). Puede calcularse también: $(g\circ f)(x)=g\left[f(x)\right]$ Donde ahora se sustituye la "x" de g por la función f(x)	La función compuesta $(g\circ f)(x)$ de las funciones: $f(x)=\frac{2}{x}$ $g(x)=3x+4$ Es: $(g\circ f)(x)=g\left[f(x)\right]=3\cdot\frac{2}{x}+4=$ $=\frac{6}{x}+4=\frac{6+4x}{x}$
Función recíproca o inversa	La función y=f(x)	La función recíproca de y=f(x) se obtiene (caso de existir), despejando x en función de y e intercambiando las variables en el resultado. Se ha de cumplir que: $(f\circ f^{-1})(x)=(f^{-1}\circ f)(x)=I_D(x)$ Donde la función i(x) llamada identidad es: I(x)=x Es decir, asocia a cada valor él mismo. Las gráficas de f(x) y $f^{-1}(x)$ son simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante.	Inversa de $y=\frac{3x-2}{4x}=f(x)$ Despejamos "x" en función de "y": $4xy=3x-2\Rightarrow 4xy-3x=-2\Rightarrow$ $\Rightarrow(4y-3)x=-2\Rightarrow x=\frac{-2}{4y-3}$ Cambiando ahora las variables: $y=\frac{-2}{4x-3}=f^{-1}(x)$ Vemos que la composición es la identidad: $(f\circ f^{-1})(x)=f\left[f^{-1}(x)\right]=\frac{-6-8x+6}{-8}=x$

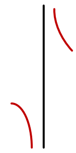
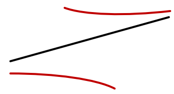
<table>
<tr><td>Función exponencial</td><td>La ecuación:
$y = a^x$
Con $a \neq 0$
$a \neq 1$</td><td>- Pasan por (0, 1) y (1, a)
- Si a>1 es creciente
- Si a<1 es decreciente.</td><td>La gráfica de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ es:
</td></tr>
<tr><td>Función logarítmica</td><td>La ecuación:
$y = \log_a x$</td><td>- Es inversa de la exponencial
- Pasa por (1, 0) y (a,1)
- Si a>1 es creciente
- Si 0<a<1 es decreciente
- Si dominio es IR^+</td><td>La gráfica de $y = \log x$ es:
</td></tr>
<tr><td>Trigonométricas inversas</td><td>y=arc sen x
y=arc cos c
y=arc tg x</td><td>Si sen x=a, entonces x=arc sen a
Si cos x=b entonces x= arc cos b
Si tg x=c entonces x= arc tg c

La gráfica de cualquiera de las funciones trigonométricas inversas es la simétrica respecto a la bisectriz del primer cuadrante, de la gráfica de la función trigonométrica correspondiente</td><td>Calcula:
$sen(\arccos(\frac{1}{2})) =$
$= sen 60^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
O bien:
$= sen 300^{\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$</td></tr>
<tr><td>Límite de una función en un punto.
Límites por la izquierda y por la derecha.</td><td>Ecuación de la función y punto en estudio</td><td>▪ Para calcular $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ se escribe una sucesión de valores de “x” que se acerque a “a”, se calcula la sucesión de los valores de f(x) y se comprueba si se acerca ésta última a algún valor real.
▪ Si se toma una sucesión de valores que crezca indefinidamente y la sucesión de f(x) tiende a “l”, escribimos:
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$
▪ Si una sucesión de valores de “x” tiende a “a” y la sucesión de f(x) crece indefinidamente, escribimos:
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$
▪ Si la sucesión de valores de “x” se aproxima a “a” pero se mantiene siempre menor que “a”, escribimos (límite por la izquierda):
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l$
▪ Si la sucesión de valores de “x” se aproxima a “a” pero se mantiene siempre mayor que “a”, escribimos (límite por la derecha):
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$
▪ La CNyS para que una función tenga límite cuando x tiende a “a” es que los límites por la derecha y por la izquierda coinciden.</td><td>Calcula $\lim\limits_{x \to 0} \frac{6}{x}$.
Veamos las sucesiones:
<table><tr><td>-1</td><td>-0,1</td><td>-0,01</td><td>-0,001</td><td>...</td><td>$\to$</td><td>0</td></tr><tr><td>-6</td><td>-60</td><td>-600</td><td>-6000</td><td>...</td><td>$\to$</td><td>$-\infty$</td></tr></table>
Por tanto:
$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{6}{x} = -\infty$
Veamos ahora:
<table><tr><td>1</td><td>0,1</td><td>0,01</td><td>0,001</td><td>...</td><td>$\to$</td><td>0</td></tr><tr><td>6</td><td>60</td><td>600</td><td>6000</td><td>...</td><td>$\to$</td><td>$+\infty$</td></tr></table>
Por tanto:
$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{6}{x} = +\infty$

Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5}{x-3}$
Sucesiones:
<table><tr><td>1</td><td>10</td><td>100</td><td>1000</td><td>...</td><td>$\to$</td><td>∞</td></tr><tr><td>$-\frac{5}{2}$</td><td>$\frac{5}{7}$</td><td>$\frac{5}{97}$</td><td>$\frac{5}{997}$</td><td>...</td><td>$\to$</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Cálculo práctico de límites</td><td>Ecuación de la función y punto.</td><td>Si una función es continua para calcular $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, en realidad calculamos *f(a)*</td><td>Calcula $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x+1}{x-4} = \frac{-2+1}{-2-4} = \frac{1}{6}$</td></tr>
</table>

Límites infinitos	Ecuación de la función y punto.	▪ Si aplicando el método anterior a una función obtenemos $\frac{a}{0};\ a \neq 0$, se calculan los límites laterales.	▪ **Calcula:** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+3}{x^2-4x+3}=\frac{4}{0}$ $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x+3}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x+3}{(x-1)(x-3)}=\left(\frac{+}{-\cdot-}\right)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x+3}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x+3}{(x-1)(x-3)}=\left(\frac{+}{+\cdot-}\right)=-\infty$
Límites en el infinito	Ecuación de la función	▪ Si obtenemos ∞ / ∞ nos quedamos con los monomios de mayor grado de numerador y denominador ▪ Si obtenemos $\infty-\infty$, en una función con radicales, multiplicamos y dividimos por el conjugado ▪ Si obtenemos $\infty-\infty$, en funciones racionales, efectuamos la operación. ▪ Para calcular límites en $-\infty$, cambiamos x por –x y $-\infty$ por $+\infty$	▪ **Calcula:** $\underset{x\to\infty}{lím}\frac{4x^2-6x+1}{2x^2+x-9}$ Para x= ∞ tenemos ∞ / ∞ . Dividiendo todo por x^2: $\underset{x\to\infty}{lím}\frac{4x^2-6x+1}{2x^2+x-9}=\underset{x\to\infty}{lím}\frac{4x^2}{2x^2}=2$ ▪ **Calcula:** $\underset{x\to\infty}{lím}\left(\sqrt{x-1}-x\right)=\underset{x\to\infty}{lím}\frac{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)}=$ $=\underset{x\to\infty}{lím}\frac{x^2-1-x^2}{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)}=\underset{x\to\infty}{lím}\frac{1}{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)}=0$ ▪ **Calcula:** $\underset{x\to\infty}{lím}\left(\frac{x^2-1}{x}-\frac{x^3}{x^2-1}\right)=\underset{x\to\infty}{lím}\frac{\left(x^2-1\right)^2-x^4}{x\left(x^2-1\right)}=0$ ▪ **Calcula:** $\underset{x\to-\infty}{lím}\frac{4x^2-6x+1}{2x^2+x-9}=\underset{x\to+\infty}{lím}\frac{4(-x)^2-6(-x)+1}{2(-x)^2+(-x)-9}=$ $=\underset{x\to+\infty}{lím}\frac{4x^2+6x+1}{2x^2-x-9}=\underset{x\to-\infty}{lím}\frac{4x^2}{2x^2}=2$
Casos de indeterminación 0/0, ∞ / ∞ e $\infty-\infty$	Ecuación de la función y punto.	▪ Si aplicando el método anterior a una función racional obtenemos el valor 0/0, factorizamos numerador y denominador, simplificamos los factores comunes y calculamos el límite de lo que resta. ▪ Si la indeterminación 0/0 procede de funciones con radicales, multiplicamos y dividimos por el conjugado, simplificamos los factores comunes y calculamos el límite de lo que resta.	▪ **Calcula:** $\underset{x\to 7}{lím}\frac{x-7}{x^2-8x+7}$ Haciendo x=7 se obtiene 0/0 Factorizando el denominador: $\underset{x\to 7}{lím}\frac{x-7}{(x-1)(x-7)}=\underset{x\to 7}{lím}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{6}$ • **Calcula:** $\underset{x\to 0}{lím}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$ Haciendo x=0 se obtiene 0/0 $\underset{x\to 0}{lím}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}=\underset{x\to 0}{lím}\frac{\left(1-\sqrt{1-x}\right)\cdot\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{x\cdot\left(1+\sqrt{1-x}\right)}=$ $=\underset{x\to 0}{lím}\frac{1^2-\left(\sqrt{1-x}\right)^2}{x\cdot\left(1+\sqrt{1-x}\right)}=\underset{x\to 0}{lím}\frac{x}{x\cdot\left(1+\sqrt{1-x}\right)}=$ $=\underset{x\to 0}{lím}\frac{1}{\left(1+\sqrt{1-x}\right)}=\frac{1}{2}$

Continuidad de una función	La ecuación de la función	Una función y=f(x) es continua en el punto x=a si se cumplen las condiciones: 1. Existe f(a) 2. Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ 3. Los dos valores anteriores coinciden. Si una función cumple: a) $\exists f(a)$ y $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$ pero ambos valores son distintos, decimos que en “a” hay una discontinuidad evitable. b) Si los límites laterales en x=a existen pero no coinciden y ambos son finitos, esto es: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ existe en “a” una discontinuidad de salto finito. c) Si alguno de los límites laterales es infinito, hay discontinuidad de salto infinito.	Estudia la continuidad de la función: $y = \dfrac{3}{x^2 - 3x + 2}$ Veamos qué valores de x anulan el denominador: $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$ En x=1 y en x=2 la función no está definida y como además: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3}{x^2 - 3x + 2} = \infty$ En x=1 hay una discontinuidad de salto infinito. Sea ahora la función: $f(x) = \begin{cases} x - 1 & si \quad x \neq 3 \\ 5 & si \quad x = 3 \end{cases}$ Como f(3)=5 y $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 2$ En x=3 hay una discontinuidad evitable
Asíntotas	Ecuación de la función	-Sí $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = k$, la recta y=k es una asíntota horizontal. -Si $\lim\limits_{x \to k} f(x) = \infty$, la recta x=k es una asíntota vertical -La recta y=mx+n es una asíntota oblicua si se cumple que: $m = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ $n = \lim\limits_{x \to \infty} \left[f(x) - mx \right]$ -Si existen asíntotas horizontales no pueden existir asíntotas oblicuas hacia el mismo lado.	Encuentra las asíntotas de la función: $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2 - 4x + 3}$ Como: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1 = m$ $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x+3} - x = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-7x+3}{x+3} = -7 = n$ La recta y=x-7 es una asíntota oblicua. Como $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x+3}{x^2 - 4x + 3} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x+3}{x^2 - 4x + 3} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x+3}{x^2 - 4x + 3} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x+3}{x^2 - 4x + 3} = +\infty \end{cases}$ Las rectas x=1 y x=3 son asíntotas verticales. No existen asíntotas horizontales
	Ecuación de la función (***funciones racionales***)	Si $grado\left(P(x)\right) \geq grado\left(Q(x)\right)$ Las asíntotas verticales u oblicuas se obtienen efectuando la división $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = c(x) + \dfrac{r(x)}{Q(x)}$ Si $grado\left(P(x)\right) < grado\left(Q(x)\right)$ la recta y=0 (eje OX) es una asíntota horizontal	• **Encuentra las asíntotas de la función:** $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x+3}$ Como: $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x+3} = (x - 7) + \dfrac{24}{x+3}$ La recta y=x-7 es una asíntota oblicua. • **Encuentra las asíntotas de la función:** $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2 - 4x + 3}$ Como $grado\left(P(x)\right) = 1 < grado\left(Q(x)\right) = 2$ y=0 es una asíntota horizontal.

	Ecuación de la función y asíntota	Posición de la curva: Para las asíntotas verticales, se estudian los límites laterales Para las asíntotas horizontales y oblicuas se estudia el signo de f(x)-asíntota ***<u>En el caso de funciones racionales</u>***, esto coincide con el signo de $\frac{r(x)}{Q(x)}$	$f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x+3}$; A.V. en x=-3: $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -3^-}\frac{x^2-4x+3}{x+3}=\left(\frac{+}{-}\right)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -3^-}\frac{x^2-4x+3}{x+3}=\left(\frac{+}{+}\right)=+\infty$  A.H. en y=x-7: $\frac{x^2-4x+3}{x+3}-(x-7)=\frac{24}{x+3}\begin{cases}<0 & si \quad x\ll \\ >0 & si \quad x\gg\end{cases}$ 
	Ecuación de la función y asíntota	Puntos de corte de curva y asíntota horizontal u oblicua : ***<u>Para funciones racionales</u>*** se obtienen igualando a cero el resto y despejando x. $r(x)=0$	$f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-4}=1+\frac{-x+4}{x^2-4}$ Y=1 es una asíntota horizontal. Punto de corte de curva y asíntota: $-x+4=0\Rightarrow x=4; y=1\Rightarrow (4,1)$