EJERCICIOS Y PROBLEMAS TEMA 1

PROBLEMA 31 pg 44

Una persona ha obtenido 6 000 € de beneficio por invertir un total de 60 000 € en tres empresas: A, B y C. La suma del dinero invertido en A y B fue *m* veces el invertido en C, y los beneficios fueron el 5% en A, el 10% en B y el 20% en C.

a) Plantea un sistema de ecuaciones para averiguar la cantidad invertida en cada empresa.

b) Prueba que si $m > 0$, el sistema es compatible determinado y resuélvelo para $m = 5$.

a) x : cantidad de dinero invertido en A

y : " " " " B

z : " " " " C

$$\begin{cases} x+y+z=60000 \\ x+y=mz \xrightarrow{\quad} x+y-mz=0 \\ 0'05x+0'1y+0'2\cdot z=6000 \end{cases}$$

b)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60000 \\ 0'05 & 0'1 & 0'2 & 6000 \\ 1 & 1 & -m & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} F_2-0'05F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60000 \\ 0 & 0'05 & 0'15 & 3000 \\ 0 & 0 & -m-1 & -60000 \end{array}\right)$$

① Si $m=-1$ $(-m-1=0)$

SISTEMA INCOMPATIBLE

② Si $m\neq-1$, en particular $m>0$

SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

Si $m=5$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60000 \\ 0 & 0'05 & 0'15 & 3000 \\ 0 & 0 & -6 & -60000 \end{array}\right)$$

$\boxed{x=20000\ €}$

$\boxed{y=30.000\ €}$

$\boxed{z=10000\ €}$

21 ⓐ página 43

Discute y resuelve en función del parámetro:

a) $\left\{\begin{array}{l} -x + my + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x - 3z = -2 \end{array}\right.$ $\quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & m & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \xrightarrow{\substack{-(3.^a) \\ (2.^a) \\ (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & m & 1 & 2 \end{array}\right)$

$$\rightarrow \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & m & 4 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ -(2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & m-1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Si $m = 1 \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminado.*

$$\left.\begin{array}{r} x + 3z = 2 \\ y + 4z = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 2 - 3z \\ y = 4 - 4z \\ z = \lambda \end{array}\right\}$$

Soluciones: $(2 - 3\lambda, 4 - 4\lambda, \lambda)$

- Si $m \neq 1 \rightarrow$ Sistema *compatible determinado.*

$$\left.\begin{array}{r} x + 3z = 2 \\ y + 4z = 4 \\ (m-1)y = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ z = 1 \\ x = 2 - 3z = -1 \end{array}\right\}$$

Solución: $(-1, 0, 1)$

Ejercicio 21 pg 43

b) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + az = 5 \\ 2x + y + z = 3 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & a & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$ $\xrightarrow{2 \leftrightarrow 3}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & a & 5 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[F_3 - 3F_1]{F_2 - 2F_1}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & a-3 & 5 \end{array}\right)$ $\xrightarrow{F_3 - F_2}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & a-2 & 2 \end{array}\right)$

- Si $a=2$ INCOMP.
- Si $a \neq 2$ COMP. DET

solución $\boxed{z = \dfrac{2}{a-2}}$ $\quad -y - z = 3 \Rightarrow y = -z-3$

$\Rightarrow \boxed{y = \dfrac{-2}{a-2} - 3 = \dfrac{-2-3\cdot(a-2)}{a-2} = \dfrac{4-3a}{a-2}}$

$x + y + z = 0 \Rightarrow x = -y - z \Rightarrow$

$\boxed{x = -\dfrac{4-3a}{a-2} - \dfrac{2}{a-2} = \dfrac{3a-6}{a-2}}$

Discute los siguientes sistemas según los valores de α e interprétalos geométricamente:

a) $\left\{\begin{aligned} \alpha x - y &= 1 \\ x - \alpha y &= 2\alpha - 1 \end{aligned}\right.$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \alpha & -1 & 1 \\ 1 & -\alpha & 2\alpha - 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} (1.^{a}) \\ (2.^{a}) \cdot \alpha - (1.^{a}) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & -1 & 1 \\ 0 & 1 - \alpha^2 & 2\alpha^2 - \alpha - 1 \end{array}\right)$$

$\alpha \neq 0$

$\alpha = 1$

- Si [illegible] queda:

  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Sistema *compatible indeterminado*. Son dos rectas coincidentes.

- Si $\alpha = -1$, queda:

  $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Sistema *incompatible*. Son dos rectas paralelas.

- Si $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -1$ $\rightarrow$ Sistema *compatible determinado*. Son dos rectas secantes.